ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ №9

Туынды ұғымға әкелетін механиканың міндеттері. Функцияның туындысы, оның геометриялық және механикалық мағынасы. Қисыққа Тангенс және қалыпты теңдеулер. Саралау ережелері. Күрделі функцияның туындысы.

Есеп 1. Берілген функциялардың туындыларын табыңыз:

а) $y=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y=x^{2/3}$ дәрежелік функциясының туындысы

$$u(x)=x,\ \alpha=\frac{2}{3} \Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}\cdot x'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

б) $y=2^{x^3}$ көрсеткіштік функциясының туындысы

$$a=2,\ u=x^3, \Rightarrow y'=2^{x^3}\cdot\ln 2\cdot\left(x^3\right)'=2^{x^3}\cdot\ln 2\cdot 3x^2=2^{x^3}\cdot 3x^2\ln 2.$$

в) $y=\sin^2 x^3=\left[\sin x^3\right]^2$.

$$u=\sin x^3,\ \alpha=2 \Rightarrow y'=2\left(\sin x^3\right)^{2-1}\cdot\left(\sin x^3\right)' \Rightarrow u=x^3 \Rightarrow 2\sin x^3\cdot\cos x^3\cdot\left(x^3\right)'=3x^2\sin 2x^3.$$

г) $y=\cos x\cdot\left(1+x^2\right) \Rightarrow y'=(\cos x)'\cdot\left(1+x^2\right)+\cos x\cdot\left(1+x^2\right)'=-\sin x\cdot\left(1+x^2\right)+2x\cos x.$

Есеп 2. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ функциясын зерттеп, графигін салыңыз.

1. Анықталу облысы: $x=1$ нүктесінен басқа барлақ нақты сандар жиыны.
2. $x=1$ нүктесі функцияның үзіліс нүктесі:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x-1}=\left(\frac{1}{1-0-1}\right)=-\left(\frac{1}{0}\right)=-\left(\frac{1}{0}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\left(\frac{1}{1+0-1}\right)=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty$$

$x=1$ нүктесі екінші түрдегі үзіліс нүктесі.

3. Егер $x=0$ болса, онда $y=0$.

$(-\infty;1)$ аралығында $y<0$, ал $(1;\infty)$ аралығында $y>0$.

4. $f(x)\neq f(-x), f(x)\neq -f(x),\ f(x+T)\neq f(x)$ болғандықтан, $f(x)$ функциясы жұп та емес, тақ та емес және периодты емес.
5. Өсу, кему аралықтарын және экстремум нүктелерін табайық.

$$y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

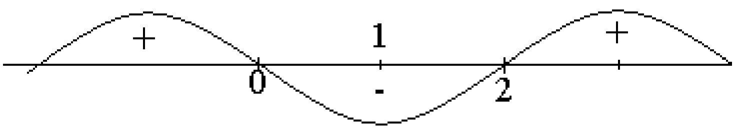
Алдымен, кризистік нүктені табамыз:

а) $y'=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x_1=0,\quad x_2=2$

б) $x=1$ нүктесінде y' анықталмаған, ендеше $x_3=1$

Сонымен, кризистік нүктелер $x_1=0, x_2=2, x_3=1$.

y'-тің таңбасы $x^2-2x=x(x-2)$ таңбасымен бірдей, яғни, $x^2-2x\geq 0$ теңсіздігін шешу жеткілікті. Бұл квадрат теңдеудің түбірлері 0 және 2, ал x^2-тің коэффиценті оң сан. Сонымен,



а) $y' < 0$ болады, $(0;2)$ аралығында, яғни, $(0;2)$ аралығында $f(x)$ кемиді;

б) $y' > 0$ болады $(-\infty;0)$ және $(2;\infty)$ болса, яғни, $(-\infty;0)$ және $(2;\infty)$ аралықтарында $f(x)$ функциясы өседі;

в) $x_1 = 0$ нүктесінен өткенде y' таңбасын «+»-тен «-»-ке өзгертеді, $x_2 = 2$ нүктесінен өткенде таңбасын «-»-тен «+»-ке өзгертеді, ал $x_3 = 1$ нүктесінен өткенде y' таңбасын өзгертпейді.

Сонымен, $x_1 = 0$ нүктесі $\max y(x) = y(0) = 0$, $x_2 = 2$ нүктесі $\min y(x) = y(2) = 4$, $x_3 = 1$ нүктесінде экстремум жоқ.

6. Функцияның қисығының ойыс, дөңестігін және иілу нүктелерін табалық.

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

y'' -тің таңбасы (х-1)-дің таңбасымен бірдей. Ендеше,

а) $y'' < 0$ болады, $(-\infty;1)$ аралығында, яғни, $(-\infty;1)$ аралығында $f(x)$ функциясының қисығы - дөңес;

б) $y'' > 0$ болады, $(1;\infty)$ аралығында, яғни, $(1;\infty)$ аралығында $f(x)$ функциясының қисығы ойыс;

в) х=1 нүктесінде y'' анықталмаған және осы х=1 нүктесінде y'' таңбасын «–» -тан «+»-қа өзгертеді. Ендеше, $x = 1$ иілу нүктесі.

7. Асимптоталарды табалық.

а) $x = 1$ - вертикаль асимптота.

б) $y = kx + b$ -көлбеу асимптота.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

Сонымен, $y = x + 1$- көлбеу асимптота.

8. Функцияның графигін тұрғызалық.